Un calcul différentiel géométrique

Amélie Compagna

Midi conférence
Université Laval

26 mars 2019

Sommaire

Introduction

- Au cégep, la dérivée est intrinsèquement liée à la limite

Introduction

- Au cégep, la dérivée est intrinsèquement liée à la limite

Définition

Si la limite suivante

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe, alors $f(x)$ est dérivable en x_0 et $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$.

Introduction

- Au cégep, la dérivée est intrinsèquement liée à la limite

Définition

Si la limite suivante

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe, alors $f(x)$ est dérivable en x_0 et $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$.

- Sens inverse de l'histoire
  - Calculs d'aires (200av. J.C.)

Introduction

- Au cégep, la dérivée est intrinsèquement liée à la limite

Définition

Si la limite suivante

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe, alors $f(x)$ est dérivable en x_0 et $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$.

- Sens inverse de l'histoire
  - Calculs d'aires (200av. J.C.)
  - Calculs de tangentes (17e siècle)

Introduction

- Au cégep, la dérivée est intrinsèquement liée à la limite

Définition

Si la limite suivante

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe, alors $f(x)$ est dérivable en x_0 et $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$.

- Sens inverse de l'histoire
  - Calculs d'aires (200av. J.C.)
  - Calculs de tangentes (17e siècle)
  - Calculs de limite (19e siècle)

Méthode de Roberval

- Gilles Personne de Roberval (1602-1675)

Méthode de Roberval

- Gilles Personne de Roberval (1602-1675)
- La méthode générale de Roberval consiste à aller décomposer une courbe en plusieurs mouvements.

Méthode de Roberval

- Gilles Personne de Roberval (1602-1675)
- La méthode générale de Roberval consiste à aller décomposer une courbe en plusieurs mouvements.
- La somme de ces mouvements donne la tangente à la courbe.

Cycloïde

Définition

Soit Γ un cercle de centre C et A un point sur ce cercle. La *cycloïde* est le lieu géométrique défini par le point A lorsque le cercle roule sans glisser.

Cycloïde

Définition

Soit Γ un cercle de centre C et A un point sur ce cercle. La *cycloïde* est le lieu géométrique défini par le point A lorsque le cercle roule sans glisser.

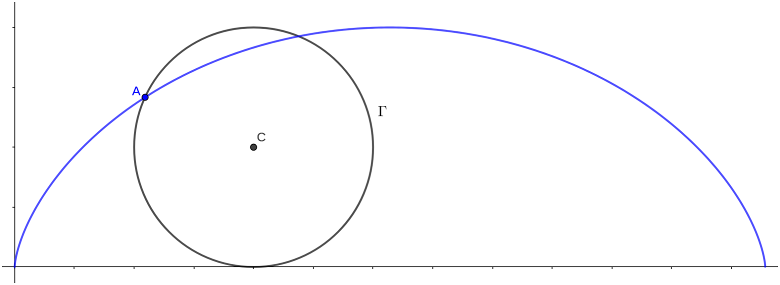

FIGURE – *Cycloïde définie par le cercle* Γ *et le point* A

Tangente à la cycloïde

La cycloïde est crée par deux mouvements. Une rotation $\vec{u}$ et une translation $\vec{v}$.

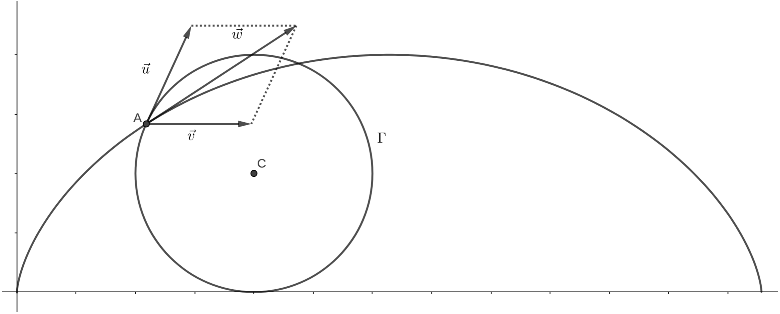

FIGURE – *Composition des mouvements de la cycloïde*

Ellipse

Définition

L'*ellipse* est le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux foyers est constante.

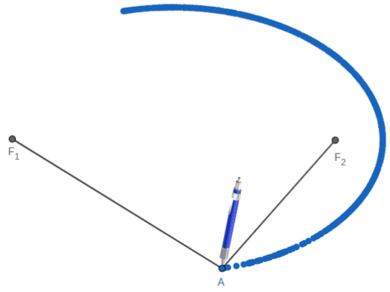

FIGURE – *Tracer l'ellipse à partir des foyers et de la longueur du grand axe*

Tangente à l'ellipse

L'ellipse est alors crée par deux mouvements. On s'éloigne de F_1 et on se rapproche de F_2.

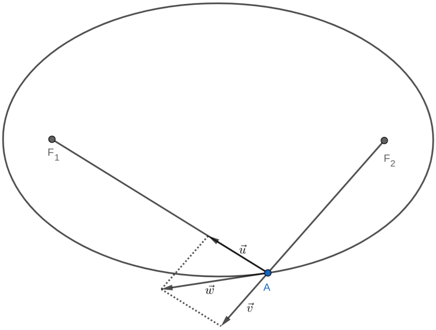

FIGURE – *Composition des mouvements de l'ellipse*

Sommaire

Méthode générale

1. René Descartes, mathématicien français (1596-1650)

Méthode générale

1. René Descartes, mathématicien français (1596-1650)

Théorème

Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme à coefficients réels de degré n.
Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de multiplicité $k \leq n$ du polynôme $P(x)$.
Alors il existe un $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, de degré $n - k$ tel que

$$P(x) = (x - a)^k Q(x).$$

Idée géométrique

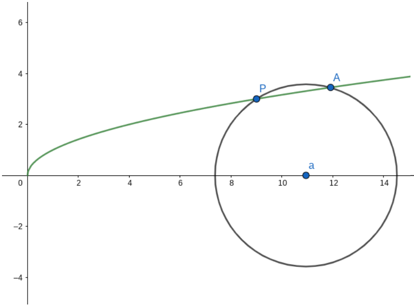

FIGURE – *Intersection à droite*

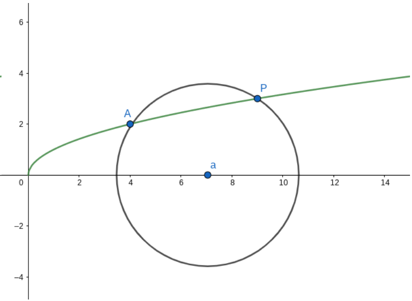

FIGURE – *Intersection à gauche*

Idée géométrique

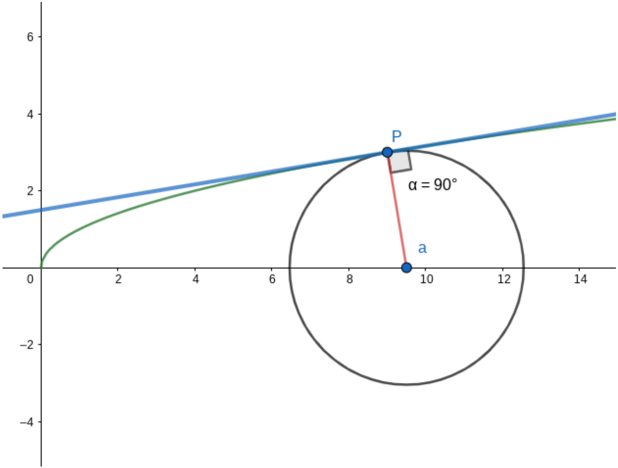

FIGURE – *Le point A et le point P sont confondus.*

Tangente à $\sqrt{x}$ au point (9,3)

On cherche l'intersection entre le cercle et la courbe. On a donc le système d'équation

$$\begin{cases} y & = x^{1/2} \\ (x-a)^2 + y^2 & = r^2 \end{cases}$$

Tangente à $\sqrt{x}$ au point (9,3)

On cherche l'intersection entre le cercle et la courbe. On a donc le système d'équation

$$\begin{cases} y &= x^{1/2} \\ (x-a)^2 + y^2 &= r^2 \end{cases}$$

Ainsi, comme on veut une racine double en $x = 9$, on aura

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + x - r^2 &= 0 \\ x^2 + (1-2a)x + (a^2 - r^2) &= (x-9)^2 = x^2 - 18x + 81 \\ \implies a &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Idée géométrique

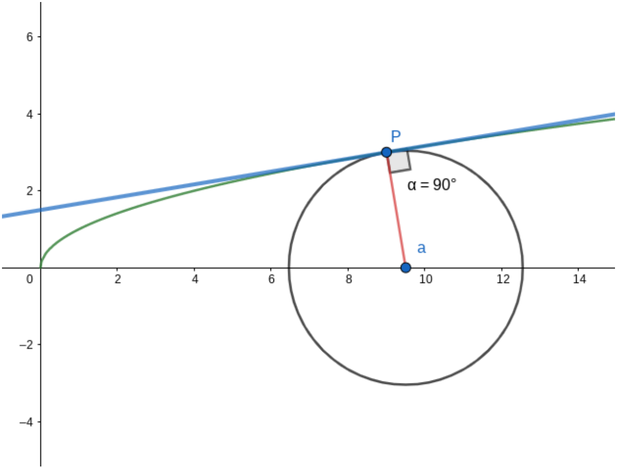

FIGURE – *Le point A et le point P sont confondus.*

Tangente à $\sqrt{x}$ au point (9,3)

La pente du rayon est donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6$$

et la pente de la tangente est $\dfrac{-1}{-6} = \dfrac{1}{6}$

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Le polynôme

$$(x-1)^2 + (x^2 + x + 1)^2 - r^2$$

doit posséder une racine double en $x = 1$.

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Le polynôme

$$(x-1)^2 + (x^2 + x + 1)^2 - r^2$$

doit posséder une racine double en $x = 1$. Donc

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 &+ 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 \\ &= Ax^4 + (B-2A)x^3 + (C-2B+A)x + (B-2C)x + C \end{aligned}$$

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Le polynôme

$$(x-1)^2 + (x^2+x+1)^2 - r^2$$

doit posséder une racine double en $x = 1$. Donc

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 \\ = Ax^4 + (B-2A)x^3 + (C-2B+A)x + (B-2C)x + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rclrcl} 1 & = & A, & 2 & = & (B-2A), \\ 4 & = & (C-2B+A), & (2-2a) & = & (B-2C), \\ a^2+1-r^2 & = & C. & & & \end{array}$$

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Le polynôme

$$(x-1)^2 + (x^2+x+1)^2 - r^2$$

doit posséder une racine double en $x = 1$. Donc

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 &+ 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2 \\ &= Ax^4 + (B-2A)x^3 + (C-2B+A)x + (B-2C)x + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rclrcl} 1 &=& A, & 2 &=& (B-2A), \\ 4 &=& (C-2B+A), & (2-2a) &=& (B-2C), \\ a^2+1-r^2 &=& C. & & & \end{array}$$

$$A = 1, \quad B = 4, \quad C = 11, \quad a = 10$$

Tangente à $x^2 + x + 1$ au point (1,3)

Ainsi, la pente du rayon du cercle est $\dfrac{-3}{9}$ et donc celle de la tangente est 3.

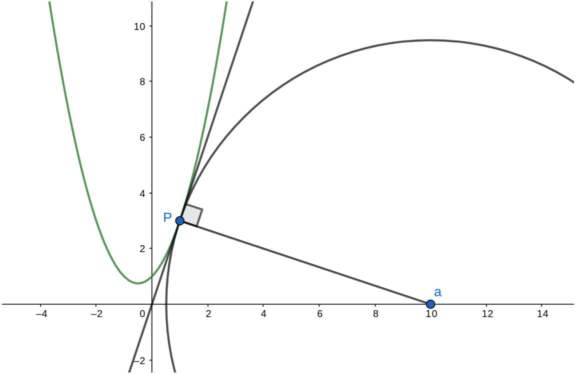

FIGURE – *La tangente à* $x^2 + x + 1$ *au point* $(1, 3)$

Sommaire

Recherche de racines doubles

- Johannes Hudde (1628-1704)

Recherche de racines doubles

- Johannes Hudde (1628-1704)
- Trouve une méthode pour trouver plus facilement les racines doubles d'un polynôme

Recherche de racines doubles

- Johannes Hudde (1628-1704)
- Trouve une méthode pour trouver plus facilement les racines doubles d'un polynôme

Règle de Hudde

Soit $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré n. Soit $(b_i)_{i=0}^{n}$ une progression arithmétique quelconque, c'est-à-dire $b_{i+1} = b_i + t$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

Alors si d est une racine double de $f(x)$, alors d est une racine de $g(x)$, où $g(x)$ est obtenue en multipliant chacune des puissances de $f(x)$ par les termes de la progression arithmétique.

Exemple : Prise 2

- Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2 - 2a)x + a^2 + 1 - r^2$, le polynôme de l'exemple précédent.

Exemple : Prise 2

- Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2$, le polynôme de l'exemple précédent.
- Progression arithmétique : (4,3,2,1,0)

Exemple : Prise 2

- Soit $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + (2-2a)x + a^2 + 1 - r^2$, le polynôme de l'exemple précédent.
- Progression arithmétique : (4,3,2,1,0)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & x^4 & + & 2x^3 & + & 4x^2 & + & (2-2a)x & + & (a^2+1-r^2) \\
\times & & & & & & & & & \\
 & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \\
\hline
 & 4x^4 & + & 6x^3 & + & 8x^2 & + & (2-2a)x & + & 0
\end{array}$$

Exemple : Prise 2 (suite)

- Le nouveau polynôme $g(x)$ obtenu est $g(x) = 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + (2 - 2a)x$.

Exemple : Prise 2 (suite)

- Le nouveau polynôme $g(x)$ obtenu est $g(x) = 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + (2 - 2a)x$.
- On cherche ainsi le a tel que $g(1) = 0$, car on veut avoir une racine double en $x = 1$.

Exemple : Prise 2 (suite)

- Le nouveau polynôme $g(x)$ obtenu est $g(x) = 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + (2 - 2a)x$.
- On cherche ainsi le a tel que $g(1) = 0$, car on veut avoir une racine double en $x = 1$.

$$\begin{aligned} g(1) = 4 + 6 + 8 + (2 - 2a) &= 0 \\ \iff a &= 10 \end{aligned}$$

Idée de démonstration

$$f(x) = (x-d)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = (x^2 - 2xd + d^2) \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$$

Idée de démonstration

$$f(x) = (x-d)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = (x^2 - 2xd + d^2) \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$$

$$x^2 b_j - 2xd(b_j + t) + d^2(b_j + 2t) = x^2 b_j - 2xdb_j - 2xdt + d^2 b_j + 2d^2$$

Idée de démonstration

$$f(x) = (x-d)^2 \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i = (x^2 - 2xd + d^2) \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i$$

$$x^2 b_j - 2xd(b_j + t) + d^2(b_j + 2t) = x^2 b_j - 2xdb_j - 2xdt + d^2 b_j + 2d^2$$

$$d^2 b_j - 2d^2 b_j - 2d^2 t + d^2 b_j + 2d^2 t = 0$$

Dérivée de x^n

Théorème

La dérivée de la fonction $f(x) = x^n$ est nx^{n-1}.

Démonstration

Soit la courbe $f(x) = x^n$ et cherchons la tangente au point (u, u^n).

Démonstration

Soit la courbe $f(x) = x^n$ et cherchons la tangente au point (u, u^n).

$$(x-a)^2 + x^{2n} - r^2 = x^{2n} + x^2 - 2ax + a^2 - r^2,$$

qui possède une racine double en u.

Démonstration

Soit la courbe $f(x) = x^n$ et cherchons la tangente au point (u, u^n).

$$(x-a)^2 + x^{2n} - r^2 = x^{2n} + x^2 - 2ax + a^2 - r^2,$$

qui possède une racine double en u.

En choisissant la progression arithmétique $(2n, 2n-1, ..., 1, 0)$, on obtient

$$g(x) = (2n)x^{2n} + 2x^2 - 2ax.$$

Démonstration

Soit la courbe $f(x) = x^n$ et cherchons la tangente au point (u, u^n).

$$(x-a)^2 + x^{2n} - r^2 = x^{2n} + x^2 - 2ax + a^2 - r^2,$$

qui possède une racine double en u.

En choisissant la progression arithmétique $(2n, 2n-1, ..., 1, 0)$, on obtient

$$g(x) = (2n)x^{2n} + 2x^2 - 2ax.$$

On a alors $a = nu^{2n-1} + u$. La pente du rayon de notre cercle est par conséquent $\dfrac{-u^n}{nu^{2n-1}} = \dfrac{-1}{nu^{n-1}}$.

Démonstration

Soit la courbe $f(x) = x^n$ et cherchons la tangente au point (u, u^n).

$$(x-a)^2 + x^{2n} - r^2 = x^{2n} + x^2 - 2ax + a^2 - r^2,$$

qui possède une racine double en u.

En choisissant la progression arithmétique $(2n, 2n-1, ..., 1, 0)$, on obtient

$$g(x) = (2n)x^{2n} + 2x^2 - 2ax.$$

On a alors $a = nu^{2n-1} + u$. La pente du rayon de notre cercle est par conséquent $\dfrac{-u^n}{nu^{2n-1}} = \dfrac{-1}{nu^{n-1}}$.

Finalement, la pente de la tangente est nu^{n-1}. ∎

Recherche d'extremums

Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x + 1$, le polynôme dont on cherche à déterminer les extremums. Examinons l'équation $f(x) = M$, où $M \in \mathbb{R}$ est une constante donnée.

Recherche d'extremums

Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x + 1$, le polynôme dont on cherche à déterminer les extremums. Examinons l'équation $f(x) = M$, où $M \in \mathbb{R}$ est une constante donnée.

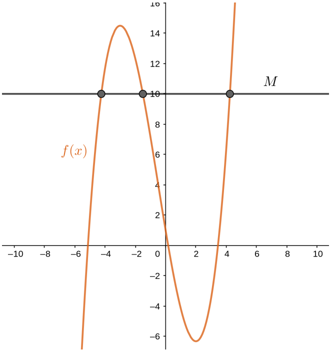

FIGURE – *Les équations de $f(x)$ et de M*

Utilisation de la règle de Hudde

On cherche quand $f(x) = M$ possède une racine double, mais on ne connaît pas M.

Utilisation de la règle de Hudde

On cherche quand $f(x) = M$ possède une racine double, mais on ne connaît pas M.

Choix d'une progression arithmétique judicieuse ?

Utilisation de la règle de Hudde

On cherche quand $f(x) = M$ possède une racine double, mais on ne connaît pas M.

Choix d'une progression arithmétique judicieuse ?

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & \frac{x^3}{3} & + & \frac{x^2}{2} & + & 6x & + & 1 - M \\
\times & & & & & & & \\
 & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \\
\hline
 & x^3 & + & x^2 & - & 6x & + & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^3 + x^2 - 6x =& x(x+3)(x-2) = 0 \\
\iff& x = 0,\ x = 2,\ x = -3
\end{aligned}
$$

Conclusion

- Isaac Newton (1642-1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Conclusion

- Isaac Newton (1642-1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Le calcul différentiel est devenu très analytique, mais il a commencé très géométrique.

Conclusion

- Isaac Newton (1642-1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Le calcul différentiel est devenu très analytique, mais il a commencé très géométrique.

Intérêt d'utiliser certains outils afin d'améliorer la compréhension de tangente au cégep ?